① Calcul de Σ

$\longrightarrow$ valeurs propres de $A^TA = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

(cas classique)

$$\Rightarrow P_{A^TA}(\lambda) = \underbrace{(\lambda-3)}_{\lambda_1}\underbrace{(\lambda-1)}_{\lambda_2}.\lambda \qquad \lambda_3 = 0$$

$$\Rightarrow \Sigma = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \longleftarrow \text{même taille que } A$$

valeurs singulières.

② Calcul de V :

$$V = [\bar{v}_1 \; \bar{v}_2 \; \bar{v}_3]$$

avec $\bar{v}_j$ est vecteur propre de valeur propre λ_j pour A^TA :

$$V = \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 2/\sqrt{6} & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{3} \end{pmatrix} \\ \begin{array}{ccc} \quad\bar{v}_1 & \quad\bar{v}_2 & \quad\bar{v}_3 \end{array} \end{array}$$

③ Calcul de U : $U = [\bar{u}_1 \ \bar{u}_2]$

$$\bar{u}_j = \frac{A\bar{v}_j}{\sqrt{\lambda_j}}, \quad 1 \leq j \leq 2$$

$$\Rightarrow \quad U = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \square$$

$\boxed{\text{EXM}}$ On veut la SVD de A. On sait

- les vecteurs suivants sont des vecteurs propres de $A^T A$:

$$\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \sqrt{3}/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \bar{v}_2 = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

- $$A\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad A\bar{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Calculer U, Σ et V telles que $A = U \Sigma V^T$.

(R) $\|A\bar{v}_j\| = \sqrt{\lambda_j},\ 1 \leq j \leq l$ $\longleftarrow$ valeurs singulières >0 de A !!

Taille

$$A \in \mathbb{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}) \text{ !!} \implies \begin{cases} \Sigma \in \mathbb{M}_{4\times 2}(\mathbb{R}) \\ U \in \mathbb{M}_{4\times 4}(\mathbb{R}) \\ V \in \mathbb{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \end{cases}$$

1) Calcul de Σ :

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Dans ce cas :

$$\underbrace{\|A\bar{v}_1\|} = 1 \quad \text{et} \quad \|A\bar{v}_2\| = 2$$

$$= \left\| \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\| \qquad = \left\| \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|$$

② Calcul de V :

$$V = \begin{bmatrix} \bar{v}_2 & \bar{v}_1 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

valeur propre 4   valeur propre 1   de $A^T A$

③ Calcul de U :

$$\bar{u}_1 = \frac{A\bar{v}_2}{\sqrt{4}} \quad \text{et} \quad \bar{u}_2 = \frac{A\bar{v}_1}{\sqrt{1}}$$

$$= \frac{A\bar{v}_2}{2} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$= A\bar{v}_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

$$\longrightarrow U = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ -1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ -1/2 & 1/2 & & \end{pmatrix}$$

??

On note que ici on peut mettre n'importe quelles colonnes

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & & \\ -1/2 & 1/2 & & \\ 1/2 & 1/2 & & \\ -1/2 & 1/2 & & \end{pmatrix}}_{U} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \\ \boxed{0 \;\; 0} \\ \boxed{0 \;\; 0} \end{pmatrix}}_{\Sigma} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} -\sqrt{3}/2 & 1/2 \\ 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}}_{V^T}$$

Il faut 2 vecteurs colonnes pour U qui soient une b.o.n.

de $\operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \end{pmatrix} \right\}^{\perp}$ $\equiv$ calculer une b.o.n.

de $\underbrace{\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}}$.

Par exemple :

$$= \underbrace{\operatorname{Vect}\left\{ \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\}}$$

G.S à une base de

$\operatorname{Ker}\begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$

EXM Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Diagonaliser A dans les complexes

$\equiv$ trouver P et D matrices 2×2 complexes avec P inversible et D diagonale telles que

$$A = P \cdot D \cdot P^{-1}$$

sachant que $\lambda_1 = 2 + e^{i\pi/2}$ est une valeur propre de A.

$= 2 + i$

$\Rightarrow \lambda_2 = 2 - i$ est l'autre valeur propre de A

Si $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ et λ est valeur propre de A

avec $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre λ

Alors $\bar{\lambda}$ est valeur propre et $\bar{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} \bar{v}_1 \\ \vdots \\ \bar{v}_n \end{pmatrix}$ est vecteur propre de valeur propre $\bar{\lambda}$.

(Preuve) $A\mathbf{v} = \lambda \mathbf{v}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}}\ = \lambda \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix} \Longrightarrow \underbrace{\begin{pmatrix} \overline{a_{1,1}} & \cdots & \overline{a_{1,n}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{a_{n,1}} & \cdots & \overline{a_{n,n}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} \overline{z \cdot w} = \overline{z} \cdot \overline{w} \\ \forall z, w \in \mathbb{C} \end{matrix}}$$

$\parallel\!\mid \longleftarrow$ car A est réelle

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix} = \overline{\lambda} \begin{pmatrix} \overline{v_1} \\ \vdots \\ \overline{v_n} \end{pmatrix}$$

$$\Downarrow$$

$$A \cdot \overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}\, \overline{\mathbf{v}} \qquad \square$$

Alors $\lambda_2 = 2 - i$ est valeur propre de A.

On va calculer un vecteur propre de A pour λ_1 :

$$A-(2+i)I_2=\begin{pmatrix}-i & 1\\ -1 & -i\end{pmatrix}\xrightarrow{L_2\leftrightarrow L_1}\begin{pmatrix}-1 & -i\\ -i & 1\end{pmatrix}\xrightarrow{L_1\leftarrow -L_1}\begin{pmatrix}1 & i\\ -i & 1\end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_2\leftarrow L_2+iL_1}\underbrace{\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}}_{\text{FER}}\implies \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I_2)=\operatorname{Ker}\begin{pmatrix}1 & i\\ 0 & 0\end{pmatrix}$$

$$\implies x_1=-ix_2$$

$$\implies \operatorname{Ker}(A-\lambda_1 I_2)=\left\{\begin{pmatrix}-ix_2\\ x_2\end{pmatrix} : x_2\in\mathbb{C}\right\}$$

$$=\operatorname{Vect}\left\{\begin{pmatrix}-i\\ 1\end{pmatrix}\right\}$$

$$\Rightarrow \mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \mathbf{v}_2 = \overline{\mathbf{v}_1} = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

Alors $P = \begin{pmatrix} -i & i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 2+i & 0 \\ 0 & 2-i \end{pmatrix}$